Zur Dioptrik eines Systems centrirter Kugelflächen.

Von dem w. M. **Victor von Lang.**

(Mit 3 Holzschnitten.)

1. Die Beziehung zwischen dem Bildgrössenverhältnisse zweier conjugirter Punkte und den Winkeln die ein durch diese Punkte gehender Lichtstrahl mit der Axe bildet, lässt sich für eine brechende Kugelfläche leicht beweisen und dann unmittelbar auf eine beliebige Anzahl centrirter Kugelflächen übertragen. Ich will nun zeigen, wie dieser Satz auch zur Ableitung der übrigen Beziehungen genügt, so dass auf diese Weise die von Helmholtz in seiner physiologischen Optik gegebene Darstellung dieses Problems beträchtlich vereinfacht wird. Zugleich ergeben sich hiebei auch unmittelbar einige der erst jüngst von Töpler [1] für solche Systeme abgeleiteten Sätze. Der Vollständigkeit wegen will ich in aller Kürze mit einer brechenden Kugelfläche beginnen.

2. Es sei o der Mittelpunkt der brechenden Kugelfläche vom Radius r; ein Lichtstrahl, der vom Punkte s des ersten Mediums ausgeht, treffe die Kugelfläche in c, die Axe po aber nach der Brechung in t. Sind dann n_1, n_2 die Brechungsquotienten der beiden Medien, so hat man

$$\frac{n_2}{n_1}=\frac{\sin sco}{\sin tco}=\frac{\sin sco}{\sin cos}\;\frac{\sin cot}{\sin tco}=\frac{so}{sc}\;\frac{ct}{ot}. \qquad (1)$$

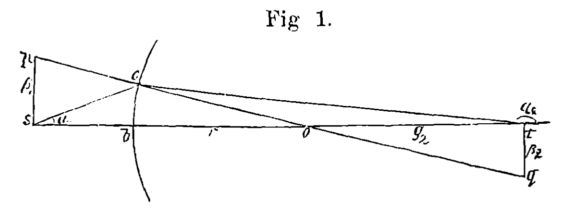
Vernachlässigt man nun zweite und höhere Potenzen des Bogens cb, so wird cb senkrecht zu st und die letzte Gleichung gibt, wenn man noch zur Abkürzung $so=g_1$, $ot=g_2$ setzt

$$\frac{n_2}{n_1}=\frac{so}{ot}\;\frac{sb}{bt}=\frac{g_1}{g_2}\;\frac{g_2+r}{g_1-r} \qquad (2)$$

---

[1] Pogg. Ann. Bd. 142, S. 232.

Fig 1.



oder auch

(3)
$$\frac{n_2}{g_1}+\frac{n_1}{g_2}=\frac{n_2-n_1}{r}.$$

Sind p, q die Durchschnitte der in den Punkten s, t zur Axe st senkrechten Ebenen mit der Geraden co, so gibt Gleichung (3), wenn man sie mit der Relation $\cos pos=1$ multiplicirt

(4)
$$\frac{n_2}{po}+\frac{n_1}{oq}=\frac{n_2-n_1}{r}.$$

Die Punkte p und q sind also ebenfalls conjugirt.

4. Durch die Punkte p, q kann das constante Grössenverhältniss $\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)$ von Object und Bild für die conjugirten Punkte s, t gefunden werden. Es ist mit Rücksicht auf Gleichung (2)

$$\frac{\beta_1}{\beta_2}=\frac{ps}{-qt}=-\frac{po}{ob}=-\frac{g_1}{g_2}=-\frac{n_2}{n_1}\cdot\frac{g_1-r}{g_2+r}=-\frac{n_2}{n_1}\frac{sb}{bt}.$$

Nennen wir nun α_1 und α_2 die Winkel, welcher der Lichtstrahl sct vor und nach der Brechung mit der Axe immer in demselben Sinne gerechnet bildet, so ist bei der eingeführten Näherung

$$sb=\frac{bc}{\tan\alpha_1},\quad bt=\frac{bc}{\tan(180-\alpha_2)}$$

und daher

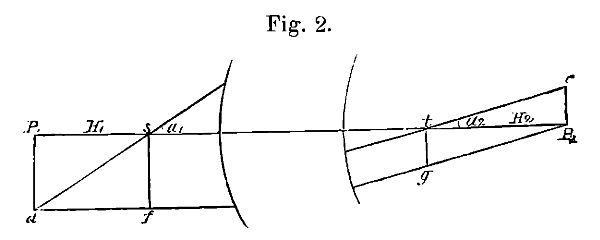
(5)
$$\beta_1 n_1\tan\alpha_1=\beta_2 n_2\tan\alpha_2.$$

5. Hat man ein ganzes System brechender Kugelflächen, so gilt die letzte Gleichung für jede einzelne Fläche, so dass bei der Addition dieser Gleichungen sich alle Glieder bis auf das erste und letzte aufheben. Die Gleichung (5) gilt also auch für eine beliebige Anzahl centrirter Kugelflächen und es beziehen sich die

Indices 1 und 2 dann auf das erste und letzte Medium. Kennt man nun für ein solches System die Lage zweier conjugirter Punkte, ihr Bildgrössenverhältniss (β_1, β_2) und auch noch die Lage der beiden Brennpunkte (P_1, P_2), d. i. der Punkte, wo das Bildgrössenverhältniss 0 und ∞ wird, so kann man immer den Gang eines Lichtstrahles im letzten Medium angeben, wenn dessen Gang im ersten bekannt ist. Man kann so auch immer zu irgend einem leuchtenden Punkt im ersten Medium sein Bild im letzten construiren.

6. Eine Beziehung zwischen den Grössen der Gleichung (5) und den Brennpunkten ergibt sich auf folgende Art. Ein Strahl der durch die conjugirten Punkte s, t des ersten und letzten Mediums unter den Winkeln α_1, α_2 zur Axe st hindurchgeht, schneide im ersten Medium die erste Brennebene in d, im letzten Medium die zweite Brennebene in e. Zieht man dann den Strahl df parallel zur Axe, so muss derselbe natürlich im letzten Medium durch den zweiten Brennpunkt P_2 hindurchgehen und muss parallel dem Strahl te sein, da ja beide durch denselben Punkt d der ersten Brennebene hindurchgehen.

Fig. 2.



Schneidet nun der Strahl df die Ebene s im Punkte f und nach der letzten Brechung die Ebene t im Punkte g, so sind auch f und g conjugirte Punkte und es ist daher, wenn $\beta_1 : \beta_2$ das Bildgrössenverhältniss für die Punkte s, t bedeutet

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{fs}{gt} = \frac{dP_1}{eP_2} = \frac{P_1 s.\ \tan \alpha_1}{tP_2.\ \tan \alpha_2}.$$

Setzen wir nun zur Abkürzung $P_1 s = H_1$, $tP_2 = H_2$, so ist mit Rücksicht auf Gleichung (5)

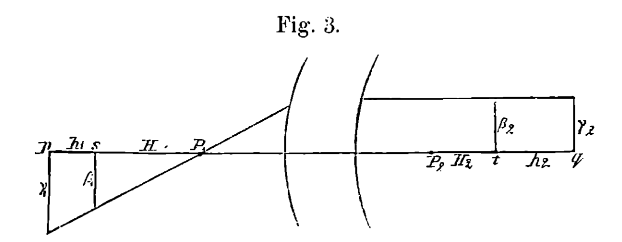
$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{H_1}{H_2}\ \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{H_1}{H_2}.\ \frac{n_2 \beta_2}{n_1 \beta_1}$$

$$(6) \qquad \frac{\beta_1}{\beta_2} = -\sqrt{\frac{H_1}{H_2} \frac{n_2}{n_1}}$$

$$(7) \qquad \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = -\sqrt{\frac{H_2}{H_1} \frac{n_2}{n_1}},$$

da hier, wie aus dem speciellen Falle einer Kugelfläche hervorgeht, die Wurzel mit negativem Zeichen zu nehmen ist.

Fig. 3.



7. Aus Gleichung (6) leitet man nun leicht die bekannte Beziehung zwischen zwei paar conjugirter Punkte und den Brennpunkten ab. Es seien auf der Axe des Systems s, t zwei conjugirte Punkte mit dem Grössenverhältniss $\beta_1 : \beta_2$ und den Brennpunktentfernungen H_1, H_2, ferner p, q zwei andere solche Punkte mit dem Grössenverhältniss $\gamma_1 : \gamma_2$ und den Brennpunktentfernungen l_1, l_2. Wir ziehen nun durch den ersten Brennpunkt P_1 einen Strahl, welcher die Ebenen s, p in den Entfernungen β_1 und γ_1 treffen soll. Dieser Strahl muss nach der letzten Brechung parallel der Axe sein; trifft er daher die Ebenen t, q in den Entfernungen β_2 und γ_2, so muss $\beta_2 = \gamma_2$ sein. Demzufolge geben die beiden Gleichungen

$$\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2 = \frac{H_1}{H_2} \frac{n_2}{n_1}, \quad \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^2 = \frac{l_1}{l_2} \frac{n_2}{n_1}$$

durch Division

$$\left(\frac{\gamma_1}{\beta_1}\right)^2 = \frac{H_2}{H_1} \frac{l_1}{l_2};$$

dann ist aber unserer Annahme zufolge

$$\frac{\gamma_1}{\beta_1} = \frac{l_1}{H_1}$$

und daher schliesslich

(8) $$H_1 H_2 = l_1 l_2.$$

Nennt man die Entfernungen der Punkte p, q von s, t etwa h_1, h_2 und rechnet alle Entfernung im ersten Medium von s entgegengesetzt der Lichtbewegung im letzten Medium von t parallel derselben, so hat man statt der letzten Gleichung

$$H_1 H_2 = (h_1 - H_1)(h_2 - H_2),$$

woraus leicht

(9) $$\frac{H_1}{h_1} + \frac{H_2}{h_2} = 1$$

folgt.

Aus der Gleichung (9) erhält man

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{h_1 - H_1}{H_2}$$

und somit, wenn die Punkte p, q unendlich nahe an s, t liegen,

(10) $$\lim \left[\frac{h_1}{h_2}\right] = -\frac{H_1}{H_2}.$$

welchen Ausdruck Töpler „das Bildgrössenverhältniss der Tiefendimensionen“ für die Punkte s, t nennt. Die Division der Gleichungen (10) und (6) gibt aber mit Rücksicht auf Gleichung (7) für das „Verhältniss der räumlichen Verzerrung“

(11) $$W = \left[\frac{h_1}{h_2}\right] = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1}.$$

Der Ausdruck (10) gibt auch die sogenannte „Fokaltiefe“; hat nämlich dieser Ausdruck einen grossen Werth, so werden im Punkte t auch noch Punkte ziemlich gut abgebildet, die vor oder hinter dem Punkt s liegen. Bei der eingeführten Näherung lässt sich aber die Fokaltiefe nicht unabhängig von dem Bildgrössenverhältniss (β_1, β_2) ändern.

8. In der früher erwähnten Bildconstruction ist es natürlich zweckmässig, solche Punkte s, r zu wählen, für welche entweder das Verhältniss $\frac{\beta_1}{\beta_2}$ oder das Verhältniss $\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2}$ ein einfaches wird. Setzt man $\frac{\beta_1}{\beta_2} = 1$, so erhält man die sogenannten Haupt-

punkte, von welchen die Brennpunkte um die Grössen F_1, F_2, die sogenannten Hauptbrennweiten, entfernt sein sollen. Die Gleichung (6) wird also in diesem Falle

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{12}$$

Für den allgemeinen Fall hat man aber jetzt

$$\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2 = \frac{H_1 F_2}{H_2 F_1}$$

und da zufolge Gleichung (8) auch

$$H_1 H_2 = F_1 F_2$$

sein muss:

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = -\frac{H_1}{F_1} = -\frac{F_2}{H_2}, \tag{13}$$

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = -\frac{F_2}{H_1} = -\frac{H_2}{F_1}, \tag{14}$$

Diese Gleichungen lehren unter anderm, dass, wenn die conjugirten Punkte p, q mit den Punkten s, r gleiches, aber entgegengesetztes Bildgrössenverhältniss haben, die Punkte p, q symmetrisch mit s, r gegen die Brennpunkte liegen; auch ist für beide Punktpaare dass Verhältniss $\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2}$ gleich und entgegengesetzt.

Geht dagegen für die Punkte p, q das Bildgrössenverhältniss v über in v', so gibt die Gleichung (13) nach der früheren Bezeichnung

$$\left\{\begin{aligned} h_1 &= F_1(v - v') \\ h_2 &= F_2\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v}\right), \end{aligned}\right. \tag{15}$$

welche Gleichungen, wie Töpler gezeigt hat, zur Bestimmung der Brennweiten verwendet werden können.

Den positiven Hauptpunkten entsprechen zwei negative, für welche das Bildgrössenverhältniss gleich -1 wird, und die, nach dem eben Gesagten, gegen die Brennpunkte die entgegengesetzte Lage der positiven Hauptpunkte haben.

9. Die Punkte, für welche $\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = 1$ wird, nennt man die

Knotenpunkte. Sind G_1, G_2 die Entfernungen der Brennpunkte von den Knotenpunkten, so geben die Gleichungen (13) sogleich

$$G_2 = F_1, \quad G_1 = F_2;$$

es liegen also die Knotenpunkte symmetrisch mit den Hauptpunkten gegen die Brennpunkte. Den positiven Knotenpunkten entsprechen wieder zwei negative, mit entgegengesetzter Lage gegen die Brennpunkte, für welche $\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = -1$ ist.